

ENSPT 2007

Exercice 1 : Partie A.a) Vérifions que f est impaire

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2 + 7}{2(-x)} \\ &= \frac{x^2 + 7}{-2x} \\ &= -\frac{x^2 + 7}{+2x} \end{aligned}$$

Donc $f(-x) = -f(x)$ d'où f est impaireb) Etudions f sur $]0; +\infty[$ et dressons son tableau de variation

limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

Dérivée

$$f'(x) = \frac{2x(2x) - 2(x^2 + 7)}{(2x)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 14}{(2x)^2}$$

Sens de variation de f

$$f'(x) = 0$$

$$2x^2 - 14 = 0$$

$$x = \sqrt{7} \text{ ou } x = -\sqrt{7}$$

| | | | |
|----------------------------|---|------------|-----------|
| x | 0 | $\sqrt{7}$ | $+\infty$ |
| $\frac{2x^2 - 14}{(2x)^2}$ | | - | 0 |
| | | + | |

- Dans $]0; \sqrt{7}[$ $f''(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.
- Dans $]\sqrt{7}; +\infty[$ $f''(x) > 0$ donc f est strictement croissante

Tableau de variation

| | | | |
|---------|-----------|------------|-----------|
| x | 0 | $\sqrt{7}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - 0 + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\sqrt{7}$ | $+\infty$ |

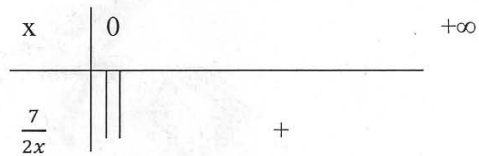
2). a) Vérifions que (C) admet une asymptote oblique

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x^2 + 7}{2x} \\
 &= \frac{x^2}{2x} + \frac{7}{2x} \\
 &= \frac{x}{2} + \frac{7}{2x}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{2x} \right) = 0$$

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ Donc la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$ et en $+\infty$ On a aussi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ Donc La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C)b) position de (C) par rapport à (D) sur $]0; +\infty[$

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{7}{2x}$$



Dans $]0; +\infty[$ $(fx) > \frac{x}{2}$

Donc dans $] -\infty; 0 [$ (C) est au dessus de (Δ)

3) Tracé de (C)

f est impaire donc (C) admet l'origine O du repère comme centre de symétrie.

Table de valeurs

| | | | | | |
|------|---|------|------|------|-------|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| f(x) | 4 | 11/4 | 15/6 | 23/8 | 32/10 |

Partie B

a) Valeur tracte de α_λ

$$\begin{aligned}
 a_\lambda &= \int_\lambda^1 \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) dx = \int_\lambda^1 \frac{7}{2x} dx \\
 &= \left[\frac{7}{2} \ln(x) \right]_\lambda^1 \\
 &= -\frac{7}{2} \ln \lambda \\
 a_\lambda &= -\frac{7}{2} \ln \lambda
 \end{aligned}$$

b) calcul de $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} a_\lambda$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} a_\lambda = +\infty$$

2) a) calcul de λ_0

$$\begin{aligned}
 \alpha_\lambda &= \frac{7}{2} \\
 -\frac{7}{2} \ln \lambda &= \frac{7}{2} \\
 \ln \lambda &= -1 \\
 \lambda &= e^{-1} \\
 \lambda &= \frac{1}{e} \\
 \text{donc } \lambda_0 &= \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

b) Valeur approchée de λ_0

$$2,718 < e < 2,719$$

$$\frac{1}{2,719} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2,718}$$

$$0,367 < \frac{1}{e} < 0,368$$

0,367 est une valeur approchée de λ_0 à l'ordre 3 et par défaut (ou 0,368 est une valeur approchée à l'ordre 3 par excès de λ_0)

Partie C

$$\begin{cases} u_0 \\ u_n \end{cases} = f(u_n)$$

a) confert schéma partie A

b) conjecture sur le sens de variation de (u_n)

On conjecture que la suite (u_n) est décroissante

a) Démontrons que la suite (u_n) est à termes strictement positifs

Il s'agit de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n > 0$. Par récurrence :

Montrons d'abord que $U_0 > 0$

$U_0 = 0$ et $3 > 0$. Donc $U_0 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

$U_n > 0$; donc $U_n \in]0; +\infty[$

D'après le tableau de variation, $f(U_n) \geq \sqrt{7}$ donc $U_{n+1} \geq \sqrt{7}$

Alors $U_{n+1} > 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$

Conclusion (U_n) est à termes strictement positifs.

b) Montrons que (U_n) est minorée par $\sqrt{7}$

Il s'agit de monter que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > \sqrt{7}$, montrons d'abord que $U_0 \geq \sqrt{7}$

$U_0 = 3$ et $3 \geq \sqrt{7}$ donc $U_0 \geq \sqrt{7}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \geq \sqrt{7}$ et montrons que $U_{n+1} \geq \sqrt{7}$

$$U_n \geq \sqrt{7} \text{ donc } U_n \in [\sqrt{7}; +\infty[$$

D'après le tableau de variation de f sur $[\sqrt{7}; +\infty[$, $f(U_n) \geq \sqrt{7}$

$$\text{Donc } U_{n+1} \geq \sqrt{7}$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{7}$$

Conclusion (U_n) est minorée par $\sqrt{7}$

c) démontrons la conjecture de 1b)

Démontrons donc que (U_n) est décroissant

Il s'agit de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} \leq U_n$

Démontrons d'abord que $U_1 \leq U_0$

$$U_0 = 3 \text{ et } U_1 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{8}{3} \leq 3 \text{ donc } U_1 \leq U_0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_{n+1} \leq U_n$ et démontrons que $U_{n+2} \leq U_{n+1}$

D'après la question 2) b) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [\sqrt{7}; +\infty[$

$$\text{Or } U_{n+1} \leq U_n$$

Donc $f(U_{n+1}) \leq f(U_n)$ (car f est croissante sur $[\sqrt{7}; +\infty[$)

$$\text{Donc } U_{n+2} \leq U_{n+1}$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq U_n$$

Conclusion (U_n) est décroissante.

3) Déterminons la limite de (U_n)

La suite (U_n) est décroissante minorée. Elle est donc convergente et sa limite est une solution

de l'équation $f(x) = x$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \frac{x^2 + 7}{2x} &= x \end{aligned}$$

Contrainte $x \neq 0$

Résolution : $x^2 + 7 = 2x^2$

$$-x^2 + 7 = 0$$

$$x^2 = 7$$

$$x = \sqrt{7} \text{ ou } x = -\sqrt{7}$$

$$S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$$

Or (U_n) est à terme strictement positif, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt{7}$

Exercice II

1) Résolvons donc cette équation (1)

$$Z^3 - \lambda(1+i)Z^2 + i\lambda^2 Z = 0$$

$$Z(Z^2 - \lambda(1+i)Z + i\lambda^2) = 0$$

$$Z = 0 \text{ ou } Z^2 - \lambda(1+i)Z + i\lambda^2 = 0 \quad (2)$$

Réolvons $Z^2 + \lambda(1+i)Z + i\lambda^2 = 0 \quad (2)$

$$\begin{aligned} \Delta &= (\lambda(1+i))^2 - 4(1)(i\lambda^2) \\ &= \lambda^2 + 2i\lambda^2 + \lambda^2 - 4i\lambda^2 \\ &= -2i\lambda^2 \end{aligned}$$

Calculons les racines de Δ

Déterminons d'abord les racines de $-2i$

soit $\delta \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\delta = a + ib \text{ et } \delta^2 = -2i$$

$$\delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab = -2i$$

$$\text{Donc } a^2 - b^2 + 2iab = -2i$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ ab = -1 \end{cases}$$

De plus $|\delta|^2 = |-2i| = 2$

Donc $a^2 + b^2 = 2$

Alors $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & (E_1) \\ ab = -1 & (E_2) \\ a^2 + b^2 = 2 & (E_3) \end{cases}$

$(E_1 + E_2)$ donne! $a^2 = 1$

Donc $a = -1$ ou $a = 1$

$(-E_1 + E_2)$ donne $b^2 = 2$, donc $b = -1$ ou $b = 1$

Alors $ab < 0$

On a donc : $(a = 1 \text{ et } b = -1)$ ou $(a = -1 \text{ et } b = 1)$

Les deux racines de $-2i$ sont donc

$\delta_1^* = 1 - i$ et $\delta_2 = -1 + i$

Les racines de Δ sont ainsi

$(1-i)\lambda$ et $(-1+i)\lambda$

L'équation (2) a donc pour solutions

$$Z_1 = \frac{\lambda(1+i) - (1-i)\lambda}{2}$$

$$Z_1 = i\lambda$$

$$Z_2 = \frac{\lambda(1+i) - (1-i)\lambda}{2}$$

$$Z_2 = \lambda$$

$$S = \{0; \lambda; i\lambda\}$$

2) Soient les points A, B et C les images respectives des solutions $0; \lambda$ et $i\lambda$ montrons que ABC est un triangle rectangle et isocèle.

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-i\lambda}{-\lambda}$$

donc $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

alors ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

3) Déterminons λ pour que l'équation admette $1+i$ comme solution puis résolvons cette équation dans chaque cas.

$$S = \{0; \lambda; i\lambda\}$$

On a donc $\lambda = 1+i$ ou Si $i\lambda = 1+i$

$$- \text{ Si } \lambda = 1+i$$

$$\text{Alors } i\lambda = i(1+i)$$

$$= -1 + i$$

ET donc $S = \{0; 1+i; -1+i\}$

$$- \text{ Si } i\lambda = 1+i$$

$$\lambda = \frac{1+i}{i}$$

$$\text{Alors } = \frac{i-1}{-1}$$

$$\lambda = 1-i$$

Et donc $S = \{0; 1-i; 1+i\}$

Exercice III

Probabilité pour que Mme Anne possède 2 filles après 6 accouchements.

Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de filles que peut avoir Mme Anne après 6 accouchements.

La probabilité pour que Mme Anne ait une fille après un accouchement est $P = \frac{1}{4}$

X suit donc la loi binominale de paramètre $x = 6$ et $P = \frac{1}{4}$

$$\text{Donc } P\{X = 2\} = C_6^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{15 \times 3^4}{4^6}$$

$$\text{La probabilité demande est don } P\{X = 2\} = \frac{1215}{4096}$$