ENSPT 2009

Exercice 1

1) Calcul de A

$$A = lnlne\sqrt{e} + lne^2 - ln\frac{1}{e^3} + 2ln\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$= lnlne^{1+\frac{1}{2}} + 2 + 3 - 2\,X\,\frac{1}{2}$$

$$A = ln\frac{3}{2} + 4$$

2) Résolution des équations :

(E_1) : $4e^{2x} - 9 = 0$
$4(e^x)^2 - 9 = 0$

Posons $X = e^x$

$4X^2 - 9 = 0$

$(2X-3)(2X+3)= 0 \Rightarrow X = -3/2$ ou $X = 3/2$, Donc $e^x = -3/2$ ou $e^x = 3/2$

Or $e^x = -3/2$ est impossible car $e^x > 0$

$e^x = 3/2 \Rightarrow x = ln\ 3/2$ d'où **$S = \{ln\ 3/2\}$**

(E_2) $e^{2x} - 4 = -3e^x \Rightarrow (e^x)^2 + 3\,e^x - 4 = 0$

Posons $X = e^x$

On obtient, $X^2 + 3X - 4 = 0$ $\left(E_1^{'}\right)$

$\Delta = 9 + 16$

$= 25$

$\Delta >$ Donc l'équation $\left(E_1^{'}\right)$ à Donc deux solutions X_1 et X_2

$X_1 = \frac{-3-5}{2} = -4$ $X_2 = \frac{-3-5}{2} = -1$

Donc X= - 4 ou X = 1

e^x= -4 ou e^x=1

e^x= -4 est impossible car $e^x>0$ donc e^x= 1

x = ln1 = 0

$$\mathbf{S = \{0\}}$$

3) a) résolutions dans IR² le système (S)

$$(S) = \begin{cases} 2x + y + z = 1 & (E_1) \\ x + 2y + z = 1 & (E_2) \\ x + y + 2z = 1 & (E_3) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (E_1) \\ (-2E_2) \end{matrix} \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -2x - 4y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$(E_1 - E_2): -3y - z = -1 \; (E_2')$$

$$\begin{matrix} (E_1) \\ (-2E_3) \end{matrix} \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -2x - 2y - 4z = -2 \end{cases}$$

$$(E_1 - E_3): -y - 3z = -1 \; (E_3')$$

$$\begin{matrix} (E_2') \\ (-3E_3') \end{matrix} : \begin{cases} -3y - z = -1 \\ 3y + 9z = 3 \end{cases}$$

$$\left(E_2' - 3E_3'\right): \; 8z = 2 \quad (E_3'')$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 (E_1) \\ -3y - z = -1 \; (E_2') \\ \quad 8z = 2 (E_3'') \end{cases}$$

$$(E_3''): \; z = \frac{1}{4}$$

$$-3y - \frac{1}{4} = -1$$

$(E_3'')dans\ ((E_3') :\quad -3y = -\frac{3}{4}$

$$y = \frac{1}{4}$$

$(E_3'')\ et\ (E_2')\ dans\ (E_1)$

$2x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$2x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{4}$

Donc $\mathbf{S} = \left\{\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)\right\}$

b) déduisons la résolution du système

$$\begin{cases} 2e^x + e^y + e^z = 1 \\ e^x + 2e^y + e^z = 1 \\ e^x + e^y + 2e^z = 1 \end{cases}$$

$$X = \frac{1}{4}\ \ y = \frac{1}{4}\ \ z = \frac{1}{4}$$

$$e^x = \frac{1}{4}\ e^y = \frac{1}{4}\ e^z = \frac{1}{4}$$

Posons $x = +ln\frac{1}{4}\ \ y = ln\frac{1}{4}\ \ z = ln\frac{1}{4}$

$$x = -ln4;\ y = -ln\,4;\ z = ln4$$

$$\mathbf{S} = \{(-\mathbf{ln4}; -\mathbf{ln4}; -\mathbf{ln4})\}$$

<u>Exercice 2</u>

1) Déterminons le nombre d'enfant qui ont cotisé

Soit x le nombre d'enfant qui ont cotisé.

Au départ, il y avait x+3 enfants, le prix du ballon est donc 200(x+3)

A la fin, x enfant ont cotisé donc le prix du ballon est aussi 250x

Alors 200(x+3) = 250x $\Rightarrow$ 200x+600 = 250x

$$-50x = -600$$

$$x = 12$$

Donc 12 enfants ont cotisé.

2) Prix du ballon

Ce prix est 250x = 250x12 = 3000F

Ce prix est donc 3000F

Exercice 3

1) Nombre de tirages possibles

$$C_{32}^{4} = \frac{32!}{4!\,28!}$$

$$= \frac{32x31x30x29}{4x3x2}$$

$$= 35960$$

il y'a donc 35960 tirage possibles

2) Calcul de probabilité

$$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega}$$

$$= \frac{C_8^1 X C_8^1 X C_8^1 X C_8^1}{C_{32}^4}$$

$$\frac{8x8x8x8}{3590} = \frac{4096}{3590}$$

$$P(B) = \frac{cardB}{card\Omega}$$

$$= \frac{C_4^1 X C_{28}^3}{C_{32}^4}$$

$$\frac{4X3276}{3590}$$

$$P(C) = \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}$$

Calcul de P(D)

1ère méthode

$$P(D) = \frac{C_4^2 x\, C_{28}^2 + C_4^3 x C_{28}^1 + C_4^4}{C_{32}^4}$$

2ème méthode

Soit l'évènement $\overline{D}$: « obtenir au plus 1 as »

Alors $P(\overline{D}) = \frac{C_{28}^4 + C_4^3 \; X\, C_{28}^3}{C_{32}^4}$

(ou alors $P(\overline{D})$ = P(B) + P(C))

P(D) = 1 – $P(\overline{D})$

{Application numérique ...}

EXERCICE 4 :

$f(x) = \frac{2(6x^2-x+6)}{12x^2+11x-5}$

1) Domaine de définition de f

f existe si et seulement si

$12x^2 + 11x - 5 \neq 0$

$\Delta = 11^2 - 4(12)(-5)$

$= 121+240$

$=361$

$\Delta>0$ donc le polynôme $12x^2 + 11x - 5$ admet deux racines x_1 et x_2

$$x_1 = \frac{-11-19}{2(12)}$$

$$x_1 = -\frac{5}{4}$$

$$x_2 = \frac{-11+19}{2(12)}$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

$$Df = IR / \left\{\frac{1}{3}; -\frac{5}{4}\right\}$$

Donc $= \left]-\infty; -\frac{5}{4}\right[U \left]-\frac{5}{4}; \frac{1}{3}\right[U \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$

2) Déterminons les réels a, b et c

$$f(x) = \frac{2(6x^2-x+6)}{12x^2+11x-5} = a + \frac{b}{3x-1} + \frac{c}{4x+5}$$

$$\frac{a(6x-1)(4x+5)+b(4x+5)+c(3x-1)}{(3x-1)(4x+5)} = f(x)$$

Donc $\frac{a\,(12x\&+11x-5)+\,b(4x+5)+c(3x-1)}{(3x-1)(4x+5)} = f(x)$

$$\frac{(12a)x^2+(11a+4b+3c)x+(-5a+5b-c)}{12x^2+11x-5} = \frac{12x^2-2x+12}{12x^2+11x-5}$$

Par identification

$$\begin{cases} 12a = 12 & (E_1) \\ 11a + 4b + 3c = -2 & (E_2) \\ -5a + 5b - c = 12 & (E_3 \end{cases}$$

(E_1) donne a =1

Donc $\begin{cases} a = 1 \\ 4b + 3c = -13 \ (E_2) \\ 5b - c = 17 \quad (E_3) \end{cases}$

(E_2+3E_3) donne b=2

A l'aide du (E_3) on a c = -7

Alors a=1 ; b=2 ; c=-7

et $f(x) = 1 + \frac{2}{3x-1} - \frac{7}{4x+5}$

3) Déduisons les primitives de *f* sur l'intervalle $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$

$$\int f(x)dx = \int \left(1 + \frac{2}{3x-1} - \frac{7}{4x+5}\right) dx$$

$$= x + \int \frac{2}{3x-1} dx - \int \frac{7}{4x+5} dx$$

$= \mathrm{x} + \frac{2}{3}\ln|3\mathrm{x} - 1|\frac{7}{4}\ln|4\mathrm{x} + 5| + \mathrm{k}; (k \in IR$

Les primitives de *f sur* IR sont

$F(x) = \mathrm{x} + \frac{2}{3} ln|3\mathrm{x} - 1| - \frac{7}{4} ln|4\mathrm{x} + 5| + \mathrm{k}\,; (\mathrm{k} \in \mathrm{IR}$

x	-∞	$\frac{-5}{4}$	$\frac{1}{3}$	+∞
(3x-1)	-	-	+	
4x+5	-	+	+	
$\|3x-1\|$	-(3x-1)	-(3x-1)	3x-1	
$4x-5$	- (4x+5)	(4x+5)	(4x+5)	

Les primitives de f sur $\left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$ sont donc :

$\mathrm{F(x)} = \mathrm{x} + \frac{2}{3}\ln(3\mathrm{x} - 1) - \frac{7}{4}\ln(4\mathrm{x} + 5) + \mathrm{k};\ (k \in IR)$

Exercice 5 :

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x}$$

$Df = IR)$
$=]-\infty ; +\infty[$

1) Limites aux bornes de *Df*

$$\lim f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{s^x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

2) a) Montrons que $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}}$$
$$\frac{-xe^x}{e^{2x}}$$

donc $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$

b) sens de variation et tableau de variation de *f*

Sens de variation de *f*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	

Dans]-∞ ; 0[, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante.

Dans]0 ; +∞[, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante.

Coordonnée des points d'intersection de la courbe avec les deux axes de coordonnées.

Avec l'axe des abscisses.

Résolvons l'équation *f(x) = 0*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{x+1}{e^x} &= 0 \\ x+1 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

donc: c'est le point $A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

Avec l'une des ordonnées *f(0) =1*

Donc ce point est $B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

4) Tracé de la courbé (C_f)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}$ {ceci devant être fait à 2) a) }

5) Tracé de la courbe (C_g)

la courbe (C_g) de g et l'image de la courbe (C_f) de *f* par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$