ENSPT 2012

EXERCICE 1

1) Calculons $P(R_1)$

On a : $P(\overline{D_1}) = 0{,}4$ et $P(R_1 / D_1) = 0{,}3$

$P(R_1) = P(R_1 \Omega D_1) + P(R_1 \Omega \overline{D_1})$

$= P(R_1 / D_1)\, P(D_1 + P(R_1 \Omega \overline{D_1})\, P(\overline{D_1})$

$= P(R_1 / D_1)\, P(D_1)$ (car $P(R_1 \Omega \overline{D_1}) = 0$)

Or $P(D_1) = 1 - P(\overline{D_1}) = 1-0{,}4$

$= 0{,}6$

Donc $P(R_1) = 0{,}3 \times 0{,}6$

$= 0{,}18$

2) Montrons que $P(R) = 0{,}236$

$P(R) = P(R_1) + P(R_2)$ (1)

On a déjà: $P(\overline{D_2}) = 0{,}3$ et $P[(R_2/D_2) / \overline{D_1}] = 0{,}2$

Donc

$P(R_2) = P(R_2 \Omega D_2) + P(R_2 \Omega \overline{D}_2)$

$= P(R_2)/D_2)\, P(D_2) + P(R_2/D_2)\, P(\overline{D}_2)$

$= P(R_2/D_2)\, (P(D_2)$ (car $P(R_2/D_2 = 0$

$P(R_2) = P(R_2/D_1)\, P(D_2)$ (1)

$P(R_2/D_2) = P[(R_2/D_2) \Omega D_1] + P[(R_2/D_2) \Omega \overline{D}_1]$

$= P[(R_2/D_2) / D_1]\, P(D_1) + P[(R_2/D_2)/ \overline{D_1}]\, P(\overline{D}_1)$

$= P[(R_2/D_2)/ \overline{D}_1]\, P(\overline{D}_1)$ (car $P[(R_2/D_2)/D_1] = 0$

Donc

$P(R_2/D_2) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$

En remplaçant cette valeur dans (2)

On a :

$P(R_2) = 0,08 \times 0,7 = 0,056$

En remplaçant dans (1), on a :

$P(R) = 0,18 + 0,056$

$P(R) = 0,236$

b) on veut calculer $P(R_1/R)$

$P(R_1/R) = \frac{P(R_1 \cap R)}{P(R)}$

Or $R_1 \cap R = R_1$ car $R_1 \subset R$

Donc **$P(R_1/R) = \frac{P(R_1)}{P(R)}$** {A.N}

c) Probabilité pour que 20% des personnes répondent au questionnaire

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui ont répondu au questionnaire parmi les 25 personnes.

Alors X suit la loi binomiale de paramètre P= P (R) = 0236 et n = 25

On veut calculer P{x = 5}

(Car $5 = \frac{25x20}{100}$)

$P\{x=5\} = C_{25}^{5}\, p^5 (1-P)^{25-5}$

$P\{x=5\} = C_{25}^{5}\, (0,236)^5 (1-0,236)^{20}$

{A N}

Exercice 2

1) Ecrivons les équations respectées par x et y

Pour Paul : $40x + 10y = 110$

Pour Marthe : $70x + 20y = 200$

2) Résolvons le système d'équation

$$\begin{cases} 40x + 10y = 110 \\ 70x + 20y = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y = 11(E_1) \\ 7x + 2y = 20(E_2) \end{cases}$$

$(-2\ E_1+E_2)$: $-x = -2$

$x=2$

dans (E_1) : $4\ (2) + y = 111$

$y= 3$

S= {(2 ; 3)}

Donc un piment coûte 2francs et un haricot vert coûte 3francs

3) Résolvons le système d'équation

$$\begin{cases} \dfrac{4}{(x+3)} + \dfrac{1}{(2y-1)} = 11 \\ \dfrac{7}{(x+3)} + \dfrac{1}{(2y-1)} = 20 \end{cases}$$

<u>Contrainte</u>

$x+3 \neq 0$ $\quad$ $2y-1 \neq 0$

$x\neq-3$ et $y \neq 0,5$

<u>Résolution</u>

Posons $X = \frac{1}{x+3}$ et $Y = \frac{1}{2y-1}$

On obtient alors le système

$$\begin{cases} 4X + Y = 11 \\ 7X + 2Y = 20 \end{cases}$$

D'après la question 2

X = 2 et Y = 3

Donc $\frac{1}{x+3} = 2 \quad et \quad \frac{1}{2y-1} = 3$

2x + 6 = 1 et 6y – 3 = 1

$x = \frac{-5}{2} \quad et\ y = \frac{2}{3}$

Donc $\mathbf{S} = \left\{\left(-\frac{5}{2};\ \frac{2}{3}\right)\right\}$

Résolvons graphiquement le système d'inéquations

$$\begin{cases} 4x + y = 11 \\ 7x + 2y = 20 \end{cases}$$

Pour ce faire, nous allons construire les droites d'équations : 4x+y = 11 et 7x + 2y = 20 puis nous allons hachurer l'ensemble solution.

L'ensemble solutions est la partie hachuré deux fois.

Problème

Partie A.

g(x) = $\frac{x^2+x+2}{x-1}$

1) Déterminons le domaine de définition de g

g existe si et seulement si $x-1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1$

Dg =]-∞ ;1[U]1 ;+∞[

2) Déterminons a, b et c tel que g(x) = ax + b + $\frac{c}{x-1}$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2+x+2= & x-1 \\
\hline
-x^2+x & x+2 \\
\quad 2x+2 & \\
\quad -2x+2 & \\
\quad\quad 4 &
\end{array}
$$

a=1 b=1 c=4

$g(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1}$

Partie B

1) Montrons que f'(x) = $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$

$= \frac{(x-1^2)-4}{(x-1)^2}$

$= \frac{[(x-1)-2][x-1+2]}{(x-1)^2}$

$= \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

Donc **f'(x)** $= \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

2) Signe de f'(x) et tableau de variation de f

Signe de f'(x)

x	-∞	-1		1		3	+∞
x-3	-	0	-		-	0	-
x+1	-		+		+		+
(x-1)²	+		+	0	+		+
f'(x)	+	0	-		-	0	+

pour x ∈]-∞, -1 [U] 3 ;+∞ [, f'(x) >0 pour x ∈]-1 ; -1 [U] 1 ; 3 [, f'(x) < 0

Tableau de variation de f

Signe de f'(x)

x	-∞		-1		1		3		+∞
f'(x)		+	0	-	‖	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	-1	↘	-∞ ‖ +∞	↘	7	↗	+∞

3) a) Montrons que la droite d'équation y = x+2 est une asymptote à Cf

$$lim(f(x)-y) = lim\left(x+2+\frac{4}{x-1}-(x+2)\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x-1} = 0$$

De même, $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-y) = 0$

Donc la droite (D) d'équation y = x+2 est asymptote oblique à Cf en - ∞ et en +∞

b) montrons que la droite (T) d'équation x =1 une asymptote à Cf

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$$

Donc la droite (T) d'équation x=1 et asymptote verticale à Cf

4) a) Montrons que f(1+x) + f(1-x) = 6

$$f(1-x) = (1-x)+2+\frac{4}{(1-x)-1}$$

$$= 3-x+\frac{4}{-x}$$

$$= 3-x-\frac{4}{x}$$

$$f(1+x) = (1+x) + 2 + \frac{4}{(1+x)-1}$$

$$= 3 + x + \frac{4}{x}$$

Donc f(1-x) + f(1+x) = 6

b) déduisons que k(1 ;3) est un centre de symétrie à (Cf)

On a d'après 4)a)

f(1-x) + f(1+x) = (2)(3)

donc le point k (1 ;3) est un centre de symétrie à Cf

5) tracé de Cf

{faire d'abord une table de valeurs}