ENSPT 2013

EXERCICE 1

$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

i) $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + dc \\ ab + db & bc + d^2 \end{pmatrix}$

ii) $M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+b) & bc + d^2 \end{pmatrix}$

$X_M(\propto) = \det(M - \propto I)$

$= \begin{vmatrix} a-\propto & c \\ b & d-\propto \end{vmatrix}$

$= \propto^2 - (a+d)\propto + ad - bc$

D'après le théorème de cayley-hamilton l'endomorphisme associé à la matrice M est racine de X_M

Donc $M^2 - (a+d)M + (ad-bc)\, I = 0$

Prendre $\lambda = (a+d)$ et $\mu = bc - ad$

iii) $\det M \neq 0$ $M^{-1} = \frac{1}{detM}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

iv) $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_2(R) | A = \alpha M + \beta I_2;\ \alpha, \beta \in IR\}$

Montrons que $\mathcal{A}$ est un s.e.v

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$ car $D_2 \in \mathcal{A}$

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2(IR)$

- soient λ, $\mu \in$ IR, $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ montrons *que* $\lambda A_1 + \mu A_2 \in \mathcal{A}$

$A_1 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 = \alpha_1 M + \beta_1 I_2$ $\alpha_1, \beta_1 \in R$

$A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_2 = \alpha_2 M + \beta_2 I_2$ $\alpha_2, \beta_2 \in IR$

$\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda (\alpha_1 M + \beta_1 I_2) + \mu (\alpha_2 M + \beta_2 I_2)$

$= \alpha_1 (\lambda M) + \beta_1 (\lambda I_2) + \mu (\alpha_2 M + \beta_2 I_2)$

$= (\alpha_1 \lambda + \mu \alpha_2) M + (\lambda \beta_1 + \mu \beta_2) I_2 \in \mathcal{A}$ car $\left| \begin{array}{l} \alpha_1 \lambda + \mu \alpha_2 \in IR \\ \lambda \beta_1 + \mu \beta_2 \in IR \end{array} \right.$

v) D'après le produit de deux matrices de $\mathcal{A}$ se met sous la forme $M^2 - \lambda M + \mu I_2$ qui est encore une matrice de $\mathcal{A}$

iv) Evident

Exercice 2

$y = x^2 + 2x - 3$

$= (x-1)(x+3)$

1) Extremum (-1, -4), c'est un minimum.
2) Evident
3) Evident

Exercice 2

$f : x \to x^2 - 3$; $g : x \to 3x+1$; $h : x \to \frac{2}{3}x - 1$

a) i) $gof : x \to g(f_{(x)}) = 3(x^2-3) + 1 = 3x^2 - 8$

$fog : x \to f(g_{(x)}) = (3x+1)^2 - 3 = 9x^2 + 6x - 2$

$g^{-1} : x \to g'(x) = \frac{1}{3}(x-1)$

$h^{-1} : x \to h'(x) = \frac{3}{2}(x+1)$

$$\underline{fog(x) - gof(x) - 18} = 9x^2 + 6x - 2 - 3x^2 + 8 - 18$$

$$= 6x^2 + 6x - 12$$

$$E = 0 \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x+2) = 0$$

S = { **2; 1**} $|x_1| = 2,\ |x_2| = 1$

iii) goh(x) = g (h(x) = 2x-3+1 = 2x-2

(gohof) ($|x_1|$) = 2 ($|x_1|^2$-3) -2

= 2 (4-3)-2 = 0

b) $C^2 = \left[\frac{c^2(x-a)}{b}\right]^{1/2}$

$C^4 = \frac{c^2}{b}$ (x-a) ⇒ x − a = bc²

⇒ x = bc²+a

a = c = 2 b ≤ 3 ⇒ x = 4b+2

x = {4b+2, b ≤ 3}

b) $\begin{cases} 3x = 2y \quad (i) \quad \Rightarrow y = \frac{3}{2}x \\ x^2 + xy + y^2 = 19 \end{cases}$

(2) ⇒ $x^2 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 19$

⇒ $x^2\left(1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right) = 19$

⇒ $\frac{19}{4}x^2 = 19$ ⇒ $x^2 = 4$ $\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 3 \end{cases}$

ii) idem