

ENSPT AOUT 2008

EXERCICE 1

Pour tout nombre complexe Z , on définit $P(z) = Z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)Z^2 + 4(1 - \sqrt{2})Z - 8$

- 1) Vérifier que $P(2) = 0$ puis déduire une factorisation de $P(Z)$
- 2) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(Z) = 0$, soient Z_1 et Z_2 les solutions autres que 2; Z_1 ayant une partie imaginaire positive; vérifier que $Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{2}$
Déterminer le module et un argument de Z_1 et Z_2
- 3) a) placer dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{u}; \vec{v})$ les points A, B et C d'affixe respectifs 2; Z_1 et Z_2 et I milieu [AB]
b) Montrer que le triangle OAB est isocèle et déduire une mesure de $(\vec{u}; OI)$
c) calculer l'affixe Z_1 de I puis le module de Z_1 en déduit des résultats précédents: $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$ on rappelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$ du plan (unité graphique 2cm)

- 1) a) déterminer la limite $f(x)$ quand x tend vers 0
b) montrer que $\frac{x + \ln x}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$; en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$
c) Justifier que les droites (D) et (Δ) d'équation respectives $x=0$ puis $y = x+1$ sont asymptotes à (C)
- 2) a) montrer que la fonction h définie par $h(x) = x + \ln x$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs positifs et négatives
b) montrer que (Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha + \ln \alpha = 0$;
Montrer que $\alpha \in]0,56; 0,57[$
c) Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ)
- 3) Etudier le sens de variation de f
- 4) Déduire de 3), l'existence d'une valeur unique β telle que $f(\beta) = 0$ et montrer que $\beta \in]0,46; 0,47[$
- 5) construire (C) et (Δ)

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

b) Hachurer la région du plan comprise entre (C) ; (Δ) et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$; calculer en cm^2 l'aire de cette région.

EXERCICE 3

Linéaires $\cos^4(3x)$ et déduire $I = \int_0^\pi \cos^4(3x) dx$

Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \sin 5x dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(2x) dx$

EXERCICE 4

On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$

1.

a) soit I la fonction définie sur $[0; 2]$ par $I(t) = \frac{2t+3}{t+2}$

Etudier les variations de I sur $[0; 2]$. En déduire que : $\forall t \in [0; 2] ; \frac{3}{2} \leq I(t) \leq \frac{7}{4}$

b) montrer que pour $t \in [0; 2]$, on a : $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq I(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$

c) En déduire que : $\frac{3}{2} n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq U_n < \frac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$

d) montrer que si la suite (U_n) possède une limite α , alors $3 \leq \alpha \leq \frac{7}{2}$

2.

a) vérifier que : $\forall t \in [0; 2], \frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{1+t}$. En déduire : $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$

b) Montrer que $\forall t \in [0; 2], I \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que : $I \leq U_n \leq I e^{\frac{2}{n}}$

c) Déterminer la limite α de (U_n)

EXERCICE 5

Soit E_2 un plan vectoriel rapporté à une base orthonormée $B = (\vec{i}; \vec{j})$ g l'endomorphisme de E_2 qui à un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ associe le vecteur $\vec{u} = x + \frac{1}{2}y)\vec{i} + (-2x - y)\vec{j}$.

1 a) Déterminer la matrice de g dans la base B et montrer que g n'est pas bijective.

b) Déterminer le noyau Kerg et l'image Img de g .

c) En déduire que $\text{Ker}g = \text{Im}g$ de g .

2. soit \vec{v} un vecteur de $\text{Ker}g$. Montrer qu'il existe un vecteur \vec{u} de E_2 tel que $g(\vec{u}) = \vec{v}$.

3- soit \vec{e}_1 et \vec{e}_2 de coordonnées respectives $(-1 ; 2)$ et $(-1 ; 1)$

a) Montrer que $B' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E_2

b) Donner la matrice de g dans la base B'

www.touslesconcours.info
WWW.Ornipreparation.com
TELECOM PREPA
www.touslesconcours.info