

ENSPT AOUT 2010

EXERCICE 1:

Le but de cette exercice est de déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ dont le terme

$$\text{général est défini par : } U_n = \int_0^{t/n} \sqrt{\frac{t}{1+t^2}} dx$$

Le calcul explicite de U_n n'est pas demandé.

1. On considère la fonction f définie par $f(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{t}{1+t^2}}$ déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

2.1) Montrer que pour tout entier naturel $n > 1$ on a $U_n \geq 0$.

2.2) Etudier le signe de $U_{n-1} - U_n$, et montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

2.3) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{2}}$, et en déduire la limite de la suite $(U_n)_{n \geq 1}$

EXERCICE 2**Partie 1**

1- On note M_1 et M_2 les points du plan complexe d'affixes respectives : $Z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$ et $Z_2 = 1 - i$

1.1. Mettre sous la forme trigonométrique z_1 , z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1.2. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

2. Soit l'équation (E) d'inconnue x : $(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2$

2.1. Montrer que $\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$.

2.2. Résoudre l'équation (E) dans \mathbb{R} .

3- On considère le nombre :

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

3.1. Calculer a^2 puis déterminer son module et son argument.

3.2. En déduire le module et l'argument de a .

EXERCICE 3

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé (o, i, j) . (Unité graphique 2cm)

Partie I

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(-2 + \ln x)$$

Et on désigne par (C) sa courbe représentative relativement au repère (o, i, j) .

1- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0 , et calculer $f'(x)$.

2- Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$.

2.1- Etudier le sens de variation u .

2.2- Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[2; 3]$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

2.3- En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0; +\infty[$.

3-

3.1- Dresser le tableau de variations de f .

3.2- Exprimer \ln comme un polynôme en \mathbb{R} . Montrer que $f(0) = -\frac{(-1)^2}{e}$. En déduire une

valeur approchée de $f(0)$ à 10^{-2} près.

4-

4.1- Etudier le signe de $f(x)$.

4.2- Tracer (C) .

Partie II

Soit F la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$. On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$

1.1. Sans calculer $F(x)$, étudier le sens de variation de F sur $]0; +\infty[$.

1.2. Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?

2. 1. soit h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x \cdot \ln x - x$. Vérifier que h est la primitive sur

$]0; +\infty[$ de $x \rightarrow \ln x$

2.2. Montrer que pour tout x strictement positif : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$

2.3. En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x

3.1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$

3.2. Montrer que pour tout x strictement supérieur à 1 :

$$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{\ln x}{2x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x} \right) + 3$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$

3.3. Dresser le tableau des variations de F .

3.4. Tracer Γ sur le même graphique que (C).

4. Calculer en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e^2$

TELECOM-ORNI PREPA
WWW.TOUSLESCONCOURS.INFO
WWW.ORNI PREPARATION.COM