INGENIEURS DES TRAVAUX DES TELECOMMUNICATIONS

ENSPT AOUT 2011

<u>EXERCICE 1:</u>

QCM : les propositions justes sont engras

1. Exprimer tan 5 φ en fonction de tan φ

$a)\ tan5\varphi = \frac{(5tan\varphi-10tan^2\varphi+tan^5\varphi)}{1-10tan^2\varphi+tan^4\varphi}$; $b) tan5\varphi = \frac{(tan\varphi-12tan^3\varphi+tan^5\varphi)}{1-10tan^2\varphi+5tan^4\varphi)}$

$c) tan5\varphi = \frac{(5tan\varphi-10tan^3\varphi+tan^5\varphi)}{1-10tan^2\varphi+tan^4\varphi)}$

2 Calculer $l = lim(\frac{1}{x})^{tanx}$ *quand xtendvers0*

a) l=0

b) l=2

c) l=1

3- Calculer l= lim $(cosx)^{\frac{\pi}{2}-x}$quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$

a) l=0

b) l=2

c) *l=1*

4- Calculer $l = lim\left(\frac{a^x-b^x}{x}\right)$quand x →0 : a, b et x sont des réels non nuls.

a) l=0

b) l=e

c) l=log$(\frac{a}{b})$

5) On pose $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$où$n\ \epsilon IN^*$. Trouver une relation entre I_{n+1}et I_n.

a)$I_{n+1}=\frac{1}{2n}-\frac{x}{(1+x^2)^n}+\left(1+\frac{1}{2n}\right)I_n$ b)$I_{n+1}=\frac{1}{2n}-\frac{x}{(1+x^2)^n}-\left(1-\frac{1}{2n}\right)I_n$ c)$I_{n+1}=\frac{1}{2n}-\frac{x}{(1+x^2)^n}+\left(1-\frac{1}{2n}\right)I_n$

6) La matrice inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

La matrice inverse de A est :

a) $\begin{pmatrix} -9 & 39 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & 180 & 180 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} +9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ 36 & -192 & 180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 9 & -36 & -30 \\ -36 & 192 & 180 \\ 30 & 180 & 180 \end{pmatrix}$

7. l'ensemble de définition de la fonction numérique $x \longrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|+1}$ est

a)]-∞ ;+∞[b)]-∞ ;0[; c) {0} ; d) { }

8) calculer l'intégrale suivante $j=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x dx$:

a) $j=\frac{3}{2}$ b) $j=-\frac{3}{2}$ c) $j=-\frac{2}{3}$ d) $j=\frac{2}{3}$

9) soit la matrice $P=\begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ La matrice inverse de P est :

a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \end{pmatrix}$

10. Soit deux vecteurs $n_1=(0,0,1)$ etn_1 $(\propto -cos\beta, 0, g+\alpha.sin\beta)$ dans un système d'axes (Ox,Oy,Oz) orthonormé. On pose $\propto=$ *angle entre* n_1 et n_2 le sinus de $\propto$ *est*

a) $\frac{g+\alpha sin\beta}{\sqrt{^2+g^2+2.\propto.g.sin\beta}}$

b))$\frac{g+\sin}{^2+g^2+2.\propto.g.sin\beta}$

c)) $\frac{.\cos\beta}{\sqrt{^2+g^2+2.\propto.g.sin\beta}}$

11. Soit la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ le polynôme caractéristique, P (λ), de C est

a) $(\lambda-3)^2(\lambda+1)^2$

b) $(3+\lambda)^2(1-\lambda)^2$

c) $(3-\lambda)^2(1-\lambda)^2$

d) (3- λ) (1-?)

12. Soit x un nombre réel. L'intégrale $F(x) = \int_0^x 10^{-t}\,dt$ a pour valeur :

a) $1+10^{-x}$ b) $1-10^{-x}$ c) $\frac{1+10^{-x}}{\ln(10)}$ d) $\frac{1-10^{-x}}{\ln(10)}$

13. Dans un plan P, rapport à un repère orthonormé $(0\,;\vec{i},\vec{j})$, l'ensemble r' des points M(x,y) est défi

par $x = \frac{t}{1+t}$ et $y = \frac{t^2}{1+t}$ t décrit $\mathbb{R} - \{-1\}$

14.1) Trouver l'équation de la tangente et l'équation de la normale (perpendiculaire à la tangente) au point t=1. Les équations de la tangente et l'équation de la normale sont respectivement

a) 3x-y-1=0 et x+3y-2=0 ; b) x+3y=0 et -3x+y=0 ; c) x-3y-1=0 et 3x+y=0 :

14.2) Trouver l'équation cartésienne de r. (On la mettra sous la forme y=ax+b+$\frac{c}{x-1}$

$a)\ y = \frac{t}{x^2+1}$ b) : $y = \frac{x^2}{1-x}$ c) : $y = \frac{t}{x+1}$

15) x étant un réel strictement positif donné, On considère les intégrales : $I_n = \int_0^x sin^{2n}\,tdt$ et

$J_n = \int_0^x sin^{2n} cos^2\,tdt$pour tout entier naturel n.

16-1) Trouver une relation entre J_n, I_n et I_{n+1}

a) $J_n = I_n - I_{n+1}$ b) $I_n = I_{n+1} - I_n$ c)$J_n = I_{n+1} + I_n$

16.2) Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}

a) $I_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}\cos^{2n+1}x-\frac{1}{2n+1}I_n$

b) $I_{n+1}=-\frac{1}{2n+2}\cos x\sin^{2x+1}x+\frac{2n+1}{2n+2}I_n$

c) $I_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}\cos^{2n+1}x+\frac{1}{2n+1}I_{n+1}$

16.3) Trouver en intégrant par partie une relation entre I_n et I_{n+1}

a) $J_n=\frac{1}{2n+1}(\cos x\sin^{2n+1}x-I_{n+1})$ b) $J_{n+1}=\frac{1}{2n+1}(\cos^{2n+2}x+I_{n+1})$

c) $J_{n+1}=\frac{1}{2n+1}(\cos^{2n+3}x+I_{n+1})$

17. Soit l'intégrale $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ ($n\in\mathbb{N}$)

17.1. Après avoir calculé $I_{n+2}+I_n$, Trouverune récurrence entre I_n et I_{n+2}

a) $I_{n+2}+I_n=\frac{n}{1+n}$ b) $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{1+n}$ c) $I_{n+2}+I_n=\frac{2}{1+n}$

17.2. Calculer I_8 a) $I_8=\frac{\pi}{4}-\frac{76}{105}$ b) $I_8=\frac{\pi}{3}-\frac{76}{105}$ c) $I_8=\frac{\pi}{5}-\frac{67}{105}$

18. Quatre enseignants A, B, C et D ont proposé chacun deux exercices, un d'algèbre et un d'analyse, pour former un texte d'examen. Les étudiants doivent choisir au hasard deux de ces exercices au choix.

18.1. Calculer la probabilité P(a) qu'un étudiant choisisse deux exercices d'algèbre.

a) $p(a)=\frac{3}{16}$ b) $p(a)=\frac{3}{14}$ c) $p(a)=\frac{1}{4}=0,25$

18.2. Calculer la probabilité P(b) qu'un étudiant choisisse deux exercices proposés par le même enseignant.

a) $p(b)=\frac{1}{10}$ *b)* $p(b)=\frac{1}{60}$ *c)* $p(b)=\frac{1}{7}$

18.3. Calculer la probabilité P(c) qu'un étudiant choisisse les deux exercices proposés par l'enseignant A.

a) $p(c)=\frac{1}{3}$ *b)* $p(c)=\frac{1}{4}$ *c)* $p(c)=\frac{1}{28}$

19) Soit x un nombre réel. L'intégrale $F(x) = \int_0^x 10^{-t}\,dt$ a pour valeur :

a) $1+10^{x}$ *b)* $1-10^{x}$ *c)* $\frac{1+10^{-x}}{ln(10)}$ *c)* $\frac{1-10^{-x}}{ln(10)}$

20) Exprimer $\tan 5\varphi$ en fonction de $\tan\varphi$

a) $\tan 5\varphi = \frac{(5tan\varphi-10tan^{3}+tan^{5}\varphi)}{1-10tan^{2}\varphi+5tan\varphi}$ b) $\tan 5\varphi = \frac{(tan\varphi-12tan^{3}\varphi+5tan^{5}\varphi)}{1-10tan^{2}\varphi+5tan^{4}\varphi}$

c) $\tan 5\varphi = \frac{(5tan\varphi-10tan^{3}\varphi+tan^{5}\varphi)}{1-5tan^{2}\varphi+tan^{4}\varphi}$

21) calculer $l = \lim \left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$ *quand* $x \to 0$

a) $l = 0$ b) $l = 2$ c) $l = 1$

22) On pose : $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ où n ϵ IN* Trouver une relation entre I_{n+1} *et* I_n

a) $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \left(1+\frac{1}{2n}\right)I_n$ b) $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} - \left(1-\frac{1}{2n}\right)I_n$

c) $I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \left(1-\frac{1}{2n}\right)I_n$.

23) L'ensemble de définition de la fonction numérique $x \to \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|+1}$ est

a)]-∞ ;+∞[b)]-∞ ;0[; c) {0} ; d) { }

24) calculer l'intégrale suivant $j = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,dx$:

a) $j=\frac{3}{2}$ b) $j=-\frac{3}{2}$ c) $j=-\frac{2}{3}$ d) $j=\frac{2}{3}$

25) calculer $lim\frac{1-sinx+cosx}{1-sinx-cosx}$ quand $x \to \frac{\pi}{2}$ vaut :a) indéterminé, b) -1 c) 1

26) calculer la $\lim(x^2+1)e^{\frac{1}{2}}$ quand $x \to -\infty$ vaut

a) $\frac{1}{2}$b) $+\infty$ c) 3

26) Raisonnement par récurrence, $\forall n \epsilon N, 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=p(n)$ $Alors\ p(n+1) est$

a) $\frac{n(n+1)}{2}$ b) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ c) $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ d) $\frac{(n+1)(n+3)}{2}$

27) $\lim_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}$ a) 0 b) 1 c) $+\infty$ d) indéterminée

28- $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2)^4}{3x}$ a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{\tan(2)}{3}$ c) $+\infty$ d) indéterminé

29) $U_{n+1}=\frac{Un+10}{Un-2}$ la suite (U_n) converge vers a) -2 b) 0 c) -1 d) 2

30) Une usine fabrique des vis de 2cm de longueur. On note X la variable aléatoire ayant pour valeurs les longueurs possibles des vis, exprimées en cm, Pi la probabilité qu'une vis soit de longueur Xi. On donne

Xi	1,8	*1,9*	2	2,1	2,2
Pi	1/12	1/6	½	1/6	1/12

30-1) L'espérance x est : a) 2 b) 3 c) 1 d) autre

30-2) On prélève au hasard avec et remise 6 vis, la probabilité d'avoir exactement deux vis de 1, 8 Cm est

a) $\frac{C_6^2(11)^6}{(12)^6}$ *b*) $\frac{C_6^2(11)^3}{(12)^6}$ c) $\frac{C_6^2(11)^6}{(12)^3}=\frac{C_6^2(11)^6}{(12)^3}$ d) Autre

31) X étant un réel strictement positif donné, on considère les intégrales

$In=\int_0^x sin^{2n}\, tdt$ $et\ J_n=\int_0^x sin^{2n}cos^2\, tdt$ pour tout entier naturel *n*.

31.1)Trouver une relation entre J_n, $I_n et I_{n+1}$

a) $Jn=I_n-I_{n+1}$ *b)* $Jn=I_{n+1}-I_n$ *c)* $Jn=I_{n+1}+I_n$

31.2) Trouver une relation entre I_n et I_{n+1}

a) $I_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}cos^{2n+1}x-\frac{1}{2n+1}I_n$ b) $I_{n+1}=-\frac{1}{n+2}cos^{2n+1}x-\frac{2n+1}{2n+2}I_n$

c) $I_{n+1}=\frac{2n+1}{2n+2}cos^{2n+1}x+\frac{1}{2n+1}I_n$

31.3) Trouver en intégrant par partie, une relation entre I_n et I_{n+1}

32. soit (I) la suite numérique définie par : $In=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} sinxdx \ (n\epsilon N) \leftrightarrow I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}.sinxdx.\ \ (n\epsilon\mathbb{N})$

On a $In=$ a) $\frac{(-1)^n(e^x+1)e^{-x(n+1)}}{2}$ b) $\frac{(-1)^n(e^x-1)e^{-x(n+1)}}{2}$ c) $\frac{(-1)^n(e^x+1)e^{-x(n-1)}}{2}$

d) $\frac{(-1)^n(e^x-1)e^{-x(n-1)}}{2}$

33) Par quelles valeurs de l'entier relatif n la fraction $\frac{n^2+2}{n(n^4-1)}$ est-elle irréductible ?

a) 6k + 1 (k ϵ Z); b) 6k + 3 (k ϵ Z) c) 3(2k + 1) (k ϵ Z)

34)Quelle est la valeur du polynôme $f(Z) = Z^3 - 2iZ^2 - (1 - i)Z - 2i$ pour Z = 1 + i

a) i b) 1 c) 0 d) Autre réponse

35) La fonction $y = (\pi - 2x)tgx$ a pour limite quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ égal à :

a) i b) 2 c) $\frac{\pi}{2}$ d) autre réponse

36) La dérivée de la fonction y = arctg ax^2 est :

a) $y=\frac{2ax}{1+a^2tgax^2}$ a) $y=\frac{2ax}{1+a^2x^2}$ c) Autre réponse

37) L'intégrale $I=\int_0^x 4\frac{tgx}{cos^2x}dx$ vaut:

a) 1 - π/4 b) 1 c) 1/2 d) Autre réponse.

38) La limite de la fonction $u=\frac{3x-2logx}{x+logx}$ est égale :

a) 0 b) 1 c) 3 d) Autre réponse :

39) L'intégrale $I=\int_0^{1/2} Log(1-x^{2)}l)dx$ à pour valeur :

a) log $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ - 1 a) log $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ - 1 c) Autre réponse

40) L'équation 2Log 2 + log(x^2 - 1) + colog(4x - 1) = 0 a pour solution :

a) -1/2 b) ½ c) Autre réponse