

## ENSPT AOUT 2013

**EXERCICE : N° 1.**

On considère le nombre complexe

$$u = 3(-\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2} + \sqrt{2})$$

- i) Calculer algébriquement  $u^2$  et  $u^4$
- ii) En déduire le module et l'argument de  $u^4$  puis de  $u$ .
- iii) On envisage un nombre complexe  $Z$  de module  $\rho$  et d'argument  $\theta$ 
  - a) détermine  $Z$  tel que  $uz$  soit un nombre réel.
  - b) déterminer  $Z$  tel que  $uz$  soit un nombre imaginaire pur.
  - e) déterminer  $Z$  tel que  $uz$  soit égal à 18.

**EXERCICE 2.**

i) Soit ma matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer  $A^2$ ,  $A^3$  puis  $A^{2k}$ ,  $A^{2k+1}$   $k \in \mathbb{N}$

ii) on note  $B$  la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer  $B^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  par deux méthodes différentes. On remarquera que

$$B = I + A \text{ ou } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice N° 3**

i) Calculer les dérivées premières des fonctions suivantes:

$$a) f(x) = \frac{\arcsin(\sqrt{3x^2+2x+1})}{\sqrt{3x^2+2x+1}}$$

$$b) g(x) = \frac{\log(\sqrt{6x^3+12x})}{18x^2+12}$$

$$c) h(x) = 3xe^{\sin 3x}$$

d) décomposer en éléments simples la fonction rationnelle ci-après

$$H(x) = \frac{x^2 - 3}{(x-1)(x^2+1)}$$

En déduire une primitive de H(x).

**Exercice n°4**

i) Exprimer  $f(x) = \cos ax \cos bx$  sous forme de somme de cosinus

En déduire l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ax \cos bx dx$

Exprimer I en fonction de a pour :

$$* b = -\pi$$

$$* b = \pi$$

Qu'en conclure sur la nature des fonctions cosinus ?

ii) intégrer l'expression  $\sqrt{4-x^2}$  en utilisant le changement de variable  $2x = 4 \sin \theta$

**Exercice n° 5**

Un groupe formé d'hommes et de femme a dépensé dans un restaurant une somme totale de 10.000 francs. Chaque homme payé 190 francs et chaque femme a payé une somme de 230 francs. Trouver le nombre exact d'homme et de femmes sachant que le groupe contient plus

**EXERCICE N° 6.**

Soient  $\alpha, \beta$  les racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

i) Montrer que si  $y(p-x) = p+x$ , alors

$$(2p^2 + q)y^2 + 2y(q - p^2) + q = 0$$

ii) déduire les racines de cette équation, et exprimer

$$\left(\frac{\alpha}{2\beta + \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2\alpha + \beta}\right)^2 \text{ en fonction de } P \text{ et } q \text{ seulement.}$$

**Exercice n°7**

Sois  $\alpha$  un élément de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  on considère les sommes :

$$a_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ fois } 1}$$

$$b_n = \alpha + \alpha\alpha + \alpha\alpha\alpha + \dots + \underbrace{\alpha\alpha \dots \alpha\alpha}_{n \text{ fois } \alpha}$$

Exprimer  $b_n$  en fonction de  $a_n$ .

ii) Calculer  $a_n$  puis  $b_n$

(On pourra calculer 9  $a_n$ ).