

EPREUVE DE MATHÉMATIQUE 2013

DUREE : 3 HEURES

Exercice N°1

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Où, a, b, c, d, sont réels.

i) calculer M^2

ii) montrer qu'il existe deux nombres réels λ, μ tels que

$M^2 - \lambda - \mu I_2 = O_2$ où I_2 est la matrice identité

iii) En supposant que $\det M \neq 0$ exprimer M^{-1} en fonction de M.

iv) Montrer que l'ensemble A des matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$

Telles que $A = \alpha M + \beta I_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de M_2

v) Déduire que A est stable pour la multiplication des matrices.

iv) Appliquer les résultats ci-dessus à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{1/2}$

Exercice N°2

Soit l'équation du second degré $y = x^2 + 2x - 3$

Factoriser et trouver les coordonnées de l'extremum. Est-ce un maximum ou un minimum ?

Tracer la courbe de y pour les valeurs de x comprises entre -4 et 2. Trouver la surface de la portion de courbe en dessous de la droite $y = 5$.

En utilisant le même système d'axe et de coordonné tracer la courbe $y = \frac{1}{2}x + 1$

Ecrire les abscisses des points d'intersection des deux courbes et trouver une équation simple qui a pour solution ces points.

Exercice N° 3

Soient les fonctions f , g et h définies dans

$$f : x \longrightarrow x^2 - 3$$

$$g : x \longrightarrow 3x + 1$$

$$h : \longrightarrow \frac{2}{3}x - 1$$

Exprimer dans le même esprit les fonctions $g \circ f$, $f \circ g$, g^{-1} , h^{-1} et $g \circ h$

ii) résoudre l'équation $fg(x) - gf(x) - 18 = 0$ en exprimant les réponses en valeurs absolues

iii) soient $|x_1|$ et $|x_2|$ des solutions de cette équation.

Calculer $ghf(|x_1|)$, $ghf(|x_2|)$

Etant donné $c^2 = \left[\frac{c^2(x-a)}{b} \right]^{1/2}$

Exprimer x en fonction des autres variables. Trouver les valeurs de x pour lesquelles $b \leq 3$ et $a = c = 2$. Trouver l'ensemble des solutions de x à partir de l'intersection des deux ensembles suivants :

$$S_1 = \{0, 1, 2, \dots, 16\}$$

$$S_2 = \{1, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

Résoudre les équations :

i) $3x = 2y$ et $x^2 + xy + y^2 = 19$.

ii) $3x + y = 5$ et $x^2 + xy = 3$.