

L'épreuve est notée sur 20 et comporte deux parties A et B réparties sur trois pages.

PARTIE A : Évaluation des ressources (15points)

Exercice 1 :5points (Uniquement pour la série D)

I. On considère le polynôme complexe P de degré 3 défini par :

$$P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i.$$

1. Montrer que $P(2i) = 0$. 0,5 pt

2.a. Déterminer les nombres complexes a et b tels que :

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b). \quad \text{0,5 pt}$$

b. Résoudre l'équation $P(z) = 0$. 0,75pt

3. Soient $z_A = 1 + i$ et $z_M = x + iy$ avec x et y des nombres réels.

Soit (C) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $|z_M - z_A| = 4$.

a. Montrer que le point $B(-3, 1)$ appartient à (C) . 0,25 pt

b. Déterminer, puis représenter l'ensemble (C) . 0,5 pt

II. Dans le plan complexe, on donne les points $A(2; -5)$, $B(2; 3)$ et $C(8; -1)$.

1. Donner la forme algébrique de $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$. 0,5 pt

2. En déduire la nature exacte du triangle ABC . 0,5 pt

3. Donner la forme complexe de la rotation r de centre C qui transforme B en A . 0,75 pt

4. Soit $(C_2) : x^2 + y^2 = 9$.

Déterminer l'image de (C_2) par la rotation r . 0,75 pt

Exercice 1 : 5 points (Uniquement pour la série TI)

E est un plan vectoriel réel dont une base est $B = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit f un endomorphisme de E dont

la matrice dans la base B ci-dessus est $A = \begin{pmatrix} m - 4 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & m \end{pmatrix}$ où m est un paramètre réel.

1. Déterminer les valeurs de m pour que f soit un automorphisme de E . 0,5 pt

On prend $m = 1$ pour la suite de l'exercice.

2. a. Déterminer $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$. 0,5 pt

b. Déterminer le noyau de f , puis en donner une base. 0,5 pt

c. Déterminer l'image de f , puis en donner une base. 0,5 pt

3. on pose $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ et $\vec{v} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$ deux vecteurs de E .

a. Montrer que $B' = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de E . 0,5 pt

b. Montrer que la matrice de f dans la base B' est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. 0,5 pt

c. Calculer M^2 et M^3 . 0,5 pt

d. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}. \quad \text{0,5 pt}$$

4. Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice unité d'ordre 2 et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle d'ordre 2.
- Montrer que $2M = M^2 + M^3$ 0,25 pt
 - En déduire que $M \times (M^2 + M - 2I) = O$. 0,25 pt
 - La matrice $M^2 + M - 2I$ est-elle inversible ? 0,5 pt

Exercice 2 : 4 points

- On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(1 + x)$.
 - Montrer que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. 0,5 pt
 - Calculer $f(0)$. 0,25 pt
 - En déduire que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$. 0,5 pt
 - Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1 + x) \leq x$. 0,75 pt
- On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.
 - Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$. 0,5 pt
 - Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$. 0,5 pt
 - Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge. 0,5 pt
- On désigne par l la limite de la suite (u_n) . On admet que $f(l) = l$. Déterminer la valeur de l . 0,5 pt

Exercice 3 : 3 points

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher parmi lesquelles 2 blanches, 3 bleues et 3 rouges. On tire successivement et sans remise 2 boules de cette urne.

- Calculer la probabilité pour que les 2 boules tirées soient de même couleur. 0,75 pt
- On appelle X la variable aléatoire qui à ce tirage associe le nombre de boules rouges tirées.
 - Montrer que la loi de probabilité de X est :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	10/28	15/28	3/28

0,75 pt

- Calculer l'espérance mathématique de X . 0,5 pt
- Calculer la variance de X . 0,5 pt
- Calculer l'écart-type de X . 0,5 pt

Exercice 4 : 3 points

Anne et Solange sont deux amies qui se rendent dans un supermarché pour acheter uniquement des oranges, ananas et avocats. Anne achète une orange à 200 FCFA, un ananas à 350 FCFA, un avocat à 600 FCFA et paie la somme de 23250 FCFA.

Solange achète une orange à 300 FCFA, un ananas à 500 FCFA, un avocat à 800 FCFA et paie la somme de 32500 FCFA. Elles achètent en tout 60 fruits.

- On désigne respectivement par x, y et z le nombre d'oranges, d'ananas et d'avocats achetés par les deux amies.
 - Justifier que les nombres x, y et z vérifient le système (S) ci-dessous :

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ 2x + 3,5y + 6z = 232,5 \\ 3x + 5y + 8z = 325 \end{cases}$$

1,5 pt

- Résoudre le système (S). 0,75 pt
- En déduire le nombre d'oranges, le nombre d'ananas et le nombre d'avocats achetés par les deux amies. 0,75 pt

PARTIE B : Évaluation des compétences(5points)

Situation:

Les experts chinois en énergie solaire qui ont installé les lampadaires solaires dans le chef-lieu départemental d'une des régions du Cameroun ont révélé au Maire de ce chef-lieu que la quantité d'énergie solaire en kWh absorbée par ces lampadaires pendant la journée en fonction du temps t en heure est donnée par la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq 6; \\ -54 + 12t - \frac{1}{2}t^2 & \text{si } 6 \leq t \leq 18; \\ 0 & \text{si } 18 \leq t \leq 24. \end{cases}$$

M. le Maire se pose un certain nombre de questions légitimes concernant la capacité de ces plaques solaires à stocker effectivement l'énergie solaire. En répondant aux questions posées ci-après, donne des éléments de réponse à certaines questions que le Maire se pose.

Tâches :

1. Déterminer l'heure où l'absorption d'énergie solaire par ces lampadaires est maximale et donner cette quantité. **1,5pt**
2. Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel l'absorption d'énergie solaire par ces lampadaires augmente. **1,5pt**
3. Est-il vrai qu'il existe deux temps distincts dans la journée où la quantité d'énergie solaire absorbée vaut 6 kWh ? **1,5pt**

Présentation :

0,5 pt