(138(p)

Ministère des Enseignements Secondaires
Inspection Générale des Enseignements
Inspection de Pédagogie / sciences
Section Mathématiques

Examen : ..anc
Épreuve : ...ques
Session : 2022
Série : D
Durée : 4 heures Coefficient : 4

L'épreuve est notée sur 20 et comporte deux parties A et B réparties sur deux pages.

PARTIE A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 : 5 points

I. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé (O, I, J).
Soient z et Z deux nombres complexes où z est l'affixe du point $M(x,y)$ avec x et y des nombres réels.
On pose $Z = \frac{z+i}{z-i}$ avec $z \neq i$.

1. Donner la forme algébrique de Z. **0,75 pt**
2. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ pour que Z soit imaginaire. **0,75 pt**
3. a. Calculer $(1-i)^2$. **0,25 pt**
   b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation
   (E) : $iz^2 + (1-i)z + 1 = 0$. **0,75 pt**
4. a. Déterminer l'expression complexe de la similitude directe S de centre O et qui transforme A (0 ; 4) en B (-3 ; 0). **0,5 pt**
   b. En déduire son angle et son rapport. **0,5 pt**
5. On donne les nombres complexes $u = 1+i$ et $v = \sqrt{3}+i$.
   a. Donner les formes trigonométriques de u et v. **0,5 pt**
   b. Donner les formes trigonométrique et algébrique de $w = \frac{u}{v}$. **0,5 pt**
   c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. **0,5 pt**

Exercice 2 : 3 points

On considère le tableau ci-dessous qui résume les productions de café d'un petit cultivateur pendant les 5 premières années.

x (rang de l'année)	1	2	3	4	5
y (masse du café en kg)	25	30	40	38	50

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique. **1,25 pt**
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G_1 de la sous-série constituée des 3 premières années et celles du point moyen G_2 de la sous-série constituée des deux dernières années. **0,5 pt**
3. Donner une équation de la droite d'ajustement linéaire de Mayer. **0,75 pt**
4. Estimer alors ce que serait sa production à la 6^e^ année. **0,5 pt**

Exercice 3 : 4 points

On considère la fonction g définie par : $g(x) = (x-1)e^{-x}$.
Le plan est rapporté au repère orthonormé (O , I, J).

1. Calculer $g'(x)$ et préciser le sens des variations de g. **1,25 pt**
2. a. Calculer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$. **0,5 pt**
   b. En déduire une équation de l'asymptote horizontale. **0,25 pt**
3. Dresser le tableau des variations de g. **0,75 pt**
4. Tracer la courbe (C) de g et son asymptote. **0,5 pt**

5. Montrer que la fonction g réalise une bijection de $[2;+\infty[$ K est un intervalle à déterminer. **0,75 pt**

Exercice 4 : 3 points

I. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \left(\frac{1+n}{e}\right)^n$ où e désigne la base de la fonction logarithme népérien.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. **0,25 pt**

2. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^n \times \left(\frac{2+n}{e}\right)$. **0,5 pt**

b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. **0,5 pt**

c. En déduire que la suite (u_n) est croissante. **0,5 pt**

3. Calculer la limite de cette suite. **0,25 pt**

II. Soit E un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soient g une fonction numérique définie sur E et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in$ E. Montrer que : si g est croissante sur E, alors $u_{n+1} - u_n$ et $g(u_{n+1}) - g(u_n)$ ont le même signe. **1 pt**

PARTIE B : Évaluation des compétences (5 points)

Situation:

Un championnat de jeunes dénommé « young star » a regroupé pendant les grandes vacances 24 équipes de football réparties en 6 poules ayant chacune 4 équipes comme suit :

Poules	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Equipes	E1 à E4	E5 à E8	E9 à E12	E13 à E16	E17 à E20	E21 à E24

Avant le début de la compétition, les équipes favorites étaient E1, E6 et E22. En plus, la probabilité pour une équipe favorite de passer au 2e tour était de 0,5 tandis que pour les autres équipes il y a eu équiprobabilité de passer au 2e tour dans chaque poule.

Pour traduire le fair-play, avant chaque rencontre, chaque joueur entrant de l'équipe située à gauche de l'arbitre central saluait chaque joueur entrant de l'équipe située à droite de l'arbitre central. Le 1er tour s'est joué en aller simple dans chaque poule.

Passaient au 2e tour, les 2 premières équipes de chaque poule auxquelles on a ajouté les 4 meilleures troisièmes de l'ensemble des 6 poules. On rappelle que le 2e tour est un tour à élimination directe.

Le nombre total de matches joués pendant tout ce championnat était de 52.

A la fin du championnat, on a comptabilisé 156 buts marqués. Le nombre de buts marqués pendant le 2e tour était le tiers du nombre de buts marqués pendant les autres tours du championnat.

Un reporter non professionnel qui a couvert ce championnat aimerait disposer de quelques statistiques sur ce championnat pour les communiquer à un propriétaire d'une académie de football pour jeunes.

Tâches **:**

1. Quelle est la probabilité de chacune des équipes des poules P1 et P3 de passer au 2e tour. **1,5 pt**

2. Quel est le nombre de poignées de mains effectuées pendant le 1er tour pour traduire le fair-play. **1,5 pt**

3. Déterminer la moyenne des nombres de buts marqués par match durant le 2e tour. **1,5 pt**

Présentation **:** **0,5 pt**